Aljabar Linier

[KOMS120301] - 2023/2024

7.2 - Hubungan antar vektor-vektor di ruang $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 9 (November 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah pembelajaran ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan hasil kali titik antara dua vektor;
2. menjelaskan norma komputasi dari sebuah vektor;
3. menjelaskan jarak komputasi, sudut, dan proyeksi dua vektor;
4. menjelaskan perkalian silang vektor.

Bagian 1: **Hasil kali dalam (inner product) & Norma vektor**

Hasil kali dalam (*inner product*)

Misalkan **u** dan **v** adalah vektor di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Perkalian titik (*dot product*) atau hasil kali dalam (*inner product*) atau perkalian skalar (*scalar product*) dari **u** dan **v** ditentukan oleh:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Dalam aljabar, perkalian titik adalah jumlah perkalian dari entri-entri yang bersesuaian dari dua barisan bilangan.

Bagaimana Anda menginterpretasikan hasil kali titik dua vektor secara geometris?

Contoh

1. Misal $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, -1)$, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Contoh

1. Misal $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, -1)$, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(4) + (-2)(5) + (3)(-1) = 4 - 10 - 3 = -9$$

Contoh

1. Misal $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, -1)$, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(4) + (-2)(5) + (3)(-1) = 4 - 10 - 3 = -9$$

2. Misal $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$ dan $\mathbf{v} = (6, k, -8, 2)$. Tentukan k sedemikian hingga $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Contoh

1. Misal $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, -1)$, tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(4) + (-2)(5) + (3)(-1) = 4 - 10 - 3 = -9$$

2. Misal $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$ dan $\mathbf{v} = (6, k, -8, 2)$. Tentukan k sedemikian hingga $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(6) + 2(k) + 3(-8) + 4(2) = -10 + 2k$$

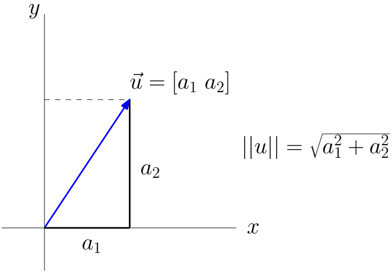
Jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ maka $-10 + 2k = 0$, berarti bahwa $k = 5$.

Norma (panjang)vektor

Norma (*norm*) atau panjang sebuah vektor **u** di $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Ilustrasi secara 2D:



Sebuah vektor **u** disebut vektor satuan jika $\|u\| = 1$.

Contoh

1. Misalkan $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$. Tentukan $\|\mathbf{u}\|$.

Contoh

1. Misalkan $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$. Tentukan $\|\mathbf{u}\|$.

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 5^2 + 3^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 9 = 55$$

Maka, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$.

Contoh

1. Misalkan $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$. Tentukan $\|\mathbf{u}\|$.

   $$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 5^2 + 3^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 9 = 55$$

   Maka, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$.

2. Diberikan vektor $\mathbf{v} = (1, -3, 4, 2)$ dan $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6})$. Tentukan manakah dari kedua vektor tersebut yang merupakan vektor satuan?

Contoh

1. Misalkan $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$. Tentukan $\|\mathbf{u}\|$.

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 5^2 + 3^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 9 = 55$$

Maka, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$.

2. Diberikan vektor $\mathbf{v} = (1, -3, 4, 2)$ dan $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6})$. Tentukan manakah dari kedua vektor tersebut yang merupakan vektor satuan?

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 9 + 16 + 4} = \sqrt{30} \quad \text{dan} \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{1}{36} + \frac{25}{36} + \frac{1}{36}} = 1$$

Oleh karena itu, $\mathbf{w}$ adalah vektor satuan, dan $\mathbf{v}$ bukan vektor satuan.

Vektor satuan standar

Vektor satuan standar di $\mathbb{R}^n$ disusun oleh n vektor:

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$$

dimana:

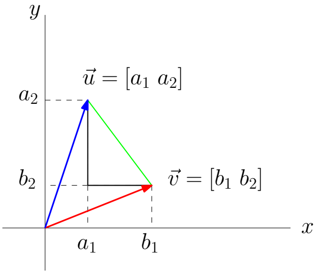
$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Bagian 2: **Jarak, Sudut, Proyeksi**

Jarak (*distance*)

Jarak antara vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dalam $\mathbb{R}^n$ ditentukan oleh:

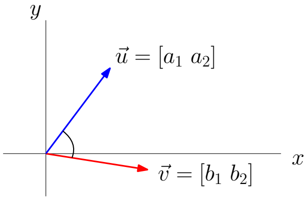
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$



$$||u - v|| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

Sudut θ antara vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$ dalam $\mathbb{R}^n$ didefinisikan oleh:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$



(Bukti dari rumus ini dapat dilihat di *https://www.youtube.com/watch?v=bbBGgHDhmVg* *)*

Apakah ini terdefinisi dengan baik? Perhatikan bahwa nilai cos berkisar dari -1 hingga 1. Sehingga:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

Latihan: Buktikan ketaksamaan tersebut!

Jika $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *adalah vektor di* $\mathbb{R}^n$, *maka* $-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1$.

Hal ini dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema "Ketaksamaan Schwarz"

Teorema (Schwarz inequality)

Untuk setiap vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *di* $\mathbb{R}^n$, *berlaku:*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Proof.

Metode pembuktian lain dapat dibaca di: `https://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/Octogon/volumes/volume1/article1_19.pdf`. □

Proyeksi dari vektor **u** ke vektor **tak-nol v** didefinisikan oleh:

$$\text{proj}_v\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

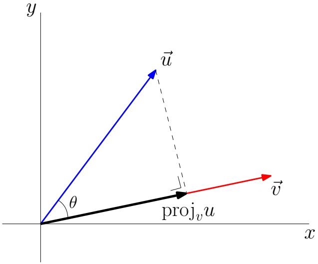


Figure: Vektor hitam merupakan hasil proyeksi vektor biru pada vektor merah

Bukti:

Panjang vektor $\text{proj}_v u$ adalah $\|\mathbf{u}\|\cos(\theta)$ (menggunakan aturan cosinus). Sehingga:

$$\begin{aligned}
\text{proj}_v\mathbf{u} &= \text{panjang vektor} \times \text{arah vektor} \\
&= (\|\mathbf{u}\|\cos(\theta)) \times \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) \\
&= \|\mathbf{u}\| \times \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \times \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) \\
&= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \\
&= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Latihan.

- *Browsing*-lah di internet tentang alasan mengapa operasi proyeksi vektor dibutuhkan/digunakan, khususnya dalam penyelesaian permasalahan dalam Ilmu Komputer.
- Presentasikan hasil diskusi kelompok Anda kepada rekan-rekan yang lain.

Pada bagian sebelumnya, telah dibahas bahwa sudut yang dibentuk oleh dua vektor **u** dan **v** dapat dihitung dengan:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Perhatikan bahwa:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ jika dan hanya jika } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad ^{*}$$

Dengan kata lain, dua vektor yang ortogonal membentuk sudut 90°

Definisi (Vektor-vektor yang ortogonal)

Dua vektor **u** *dan* **v** *di* $\mathbb{R}^n$ *dikatakan ortogonal (atau tegak lurus, atau perpendicular) jika* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Catatan: *dalam hal ini, vektor* **nol** *selalu ortogonal dengan setiap vektor di* $\mathbb{R}^n$.

[*] Ingatlah bahwa $\pi = 180^\circ$

Contoh

1. Tunjukkan bahwa vektor: $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ dan $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ ortogonal di $\mathbb{R}^4$.

2. Misalkan $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ adalah vektor satuan standar di $\mathbb{R}^3$. Tunjukkan bahwa ketiga vektor tersebut saling ortogonal satu sama lain.

Bagian 2: **Perkalian Silang (Cross Product)**

Misalkan **u** dan **v** adalah vektor dalam $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Cross product dari **u** dan **v** didefinisikan oleh:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ini dapat dengan mudah dilihat dengan menggunakan metode berikut:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Contoh

Diberikan vektor:

$$\mathbf{u} = (0, 1, 7) \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = (1, 4, 5)$$

Vektor dapat direpresentasikan sebagai matriks: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Jadi,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right) \\ &= (5 - 28,\ -(0 - 7),\ 0 - 1) \\ &= (-23, 7, -1) \end{aligned}$$

Diberikan: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$. Ini berarti bahwa:

$$\mathbf{w} \perp \mathbf{u} \quad \text{and} \quad \mathbf{w} \perp \mathbf{v}$$

Contoh

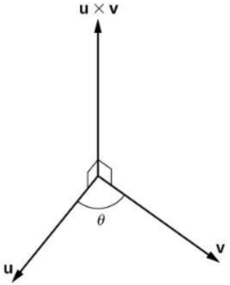
Diberikan $\mathbf{u} = (0, 1, 7)$ *dan* $\mathbf{v} = (1, 4, 5)$, *dan:*

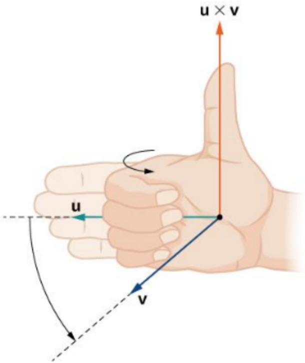
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} = (-23, 7, -1)$$

Perhatikan bahwa

- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = (-23, 7, -1) \cdot (0, 1, 7) = 0 + 7 - 7 = 0$
- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = (-23, 7, -1) \cdot (1, 4, 5) = -23 + 28 - 5 = 0$

Aturan tangan kanan





Sifat-sifat perkalian silang

Teorema

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *adalah vektor dalam* $\mathbb{R}^3$, *dan* $k \in \mathbb{R}$. *Maka:*

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
4. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times u = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Teorema

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *adalah vektor dalam* $\mathbb{R}^3$. *Maka:*

1. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ *($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal terhadap u)*
2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ *($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal terhadap v)*
3. $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ *(identitas Lagrange)*
4. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$
5. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$

Latihan: Berikan sebuah contoh yang menunjukkan kebenaran teorema di atas (satu contoh untuk masing-masing sifat).

Latihan

Buktikan identitas berikut:

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| \; ||\mathbf{v}|| \sin\theta$$

dimana θ adalah sudut antara **u** dan **v**.

Latihan

Buktikan identitas berikut:

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \sin\theta$$

dimana θ adalah sudut antara **u** dan **v**.

Jawaban:

$$\begin{aligned}
||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 &= ||\mathbf{u}||^2\ ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\
&= ||\mathbf{u}||^2\ ||\mathbf{v}||^2 - (||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \cos\theta)^2 \\
&= ||\mathbf{u}||^2\ ||\mathbf{v}||^2 - (||\mathbf{u}||^2\ ||\mathbf{v}||^2 \cos^2\theta) \\
&= ||\mathbf{u}||^2\ ||\mathbf{v}||^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= ||\mathbf{u}||^2\ ||\mathbf{v}||^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Dengan demikian, $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \sin\theta$

Vektor satuan standar dalam $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Perkalian silang antara **i** dan **j** diberikan oleh:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \right)$$

Latihan:

Selidiki hasil perkalian silang antara **i**, **j**, dan **k**:

Perkalian silang dari vektor satuan standar

Vektor satuan standar dalam $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Perkalian silang antara **i** dan **j** diberikan oleh:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \right)$$

Latihan:

Selidiki hasil perkalian silang antara **i**, **j**, dan **k**:

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
- $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$
- $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$
- $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$
- $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
- $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

Diberikan:

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$
- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor, diperoleh:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Perkalian silang dua vektor menggunakan ekspansi kofaktor

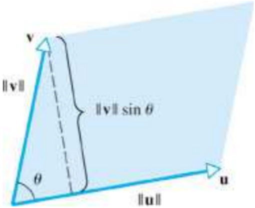
Dari contoh sebelumnya:

- $\mathbf{u} = (0, 1, 7) = \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
- $\mathbf{v} = (1, 4, 5) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

Maka:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
&= (5 - 28)\mathbf{i} - (0 - 7)\mathbf{j} + (0 - 1)\mathbf{k} \\
&= -23\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}
\end{aligned}$$

Perkalian silang dua vektor **u** dan **v** dalam $\mathbb{R}^2$ sama dengan luas jajar genjang yang ditentukan oleh kedua vektor.



$$
\begin{aligned}
\text{Luas} &= \text{alas} \times \text{tinggi} \\
&= ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||\sin\theta \\
&= ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||
\end{aligned}
$$

Contoh

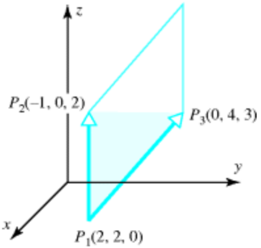
Tentukan luas segitiga yang ditentukan oleh titik-titik:

$$P_1 = (2, 2, 0), \quad P_2 = (-1, 0, 2), \quad \text{dan} \quad P_3 = (0, 4, 3)$$

Contoh

Tentukan luas segitiga yang ditentukan oleh titik-titik:

$$P_1 = (2,2,0), \quad P_2 = (-1,0,2), \quad \text{dan} \quad P_3 = (0,4,3)$$



Luas dari $\triangle = 1/2$ Luas dari *jajargenjang*

Dua vektor yang mendefinisikan jajaran genjang

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\
&= (-1,0,2) - (2,2,0) = (-3,-2,2) \\
\mathbf{v} &= \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} \\
&= (0,4,3) - (2,2,0) = (-2,2,3)
\end{aligned}$$

Dengan demikian:

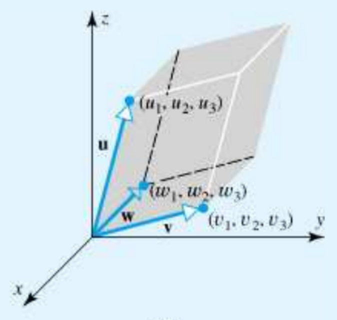
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-10, 5, -10)$$

Jadi, luas jajaran genjang adalah:

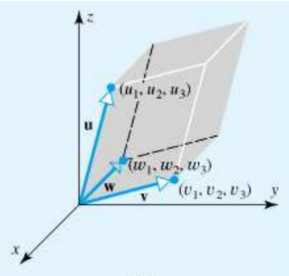
$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = \sqrt{(-10)^2 + (5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15$$

Interpretasi geometris dari perkalian silang (dalam $\mathbb{R}^3$)

Perkalian silang dari tiga vektor **u**, **v**, dan **w** dalam $\mathbb{R}^3$ sama dengan volume *paralelepiped* yang ditentukan oleh ketiga vektor.



$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \text{area of base} \;\times\; \text{height} \\
&= ||\mathbf{v} \times \mathbf{w}|| \cdot (||\text{proj}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}||) \\
&= ||\mathbf{v} \times \mathbf{v}|| \cdot \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{||\mathbf{v} \times \mathbf{w}||} \\
&= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|
\end{aligned}$$



$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

yang merupakan determinan matriks yang baris pertamanya terdiri dari elemen **u** dan baris ke-2 dan ke-3 terdiri dari elemen **v** dan **w**.

Volume *paralelepiped* sama dengan $|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$

Temukan volume *parallelepide* yang dibentuk oleh tiga vektor:

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k},\ \ \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k},\ \ \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Solusi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 60 + 4 - 15 \\
&= 49
\end{aligned}$$

Tentukan luas jajar genjang yang dibentuk oleh dua buah vektor:

$$\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

Solusi:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 9 = -25$$

Jadi, luas jajar genjang adalah $|-25| = 25$.

Latihan 2

Diberikan tiga vektor:

$$\mathbf{u} = (1, 1, 2), \ \mathbf{v} = (1, 1, 5), \ \mathbf{v} = (3, 3, 1)$$

Tentukan volume *paralelepiped* yang dibentuk oleh ketiga vektor tersebut!

Solusi:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= (1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (1)(-14) - (-1)(-14) + (2)(0) \\ &= -14 + 14 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rekap

Kita telah mendiskusikan:

- definisi vektor dalam Aljabar Linier;
- berbagai operasi pada vektor:
  - penjumlahan vektor dan perkalian skalar;
  - kombinasi linier;
  - hasil kali titik antara dua vektor;
  - komputasi norma dari sebuah vektor;
  - menghitung jarak, sudut, dan proyeksi dua vektor

Task: tulislah ringkasan tentang diskusi kita, dan kerjakan latihannya!

bersambung...